Э. М. Сафин

Институт прикладных исследований АН РБ (Стерлитамак), Eldar4u@rambler.ru

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассмотрим уравнение

$$Lu = f(x,t) = \begin{cases} u_t - u_{xx} + b^2 u = f_1(x), & t > 0, \\ u_{tt} - u_{xx} + b^2 u = f_2(x), & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

в прямоугольной области $D = \{(x,t) |\ 0 < x < 1,\ -\alpha < t < \beta\}$, где α, β, b — заданные положительные действительные числа. Для уравнения (1) поставим следующую задачу.

Обратная задача. *Найти в области D функции $u(x,t)$, $f(x,t)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u(x,t) \in C^1(\overline{D}),\ \ u(x,t) \in C^3(D_-) \cap C^2(D_+),$$

$$u_{xt}(x,t) \in C^1_x(D_+); \tag{2}$$

$$f_i(x) \in C(0,1) \cap L[0,1]; \tag{3}$$

$$Lu = f(x,t), \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{4}$$

$$u_x(0,t) - h_1 u(0,t) = 0,\ \ u_x(1,t) + h_2 u(1,t) = 0,\ \ -\alpha \leqslant t \leqslant \beta; \tag{5}$$

$$u(x,-\alpha) = \psi(x),\ \ 0 \leqslant x \leqslant 1; \tag{6}$$

$$u_t(x,-\alpha) = g(x),\ \ 0 \leqslant x \leqslant 1; \tag{7}$$

$$u(x,\beta) = \varphi(x),\ \ 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{8}$$

где h_1 *и* h_2 *— заданные положительные числа,* $\varphi(x)$, $\psi(x)$ *и* $g(x)$ *— заданные достаточно гладкие функции,* $g'(0)-h_1g(0) = 0$, $g'(1)+h_2g(1)=0$, $\varphi'(0)-h_1\varphi(0)=0$, $\varphi'(1)+h_2\varphi(1)=0$, $\psi'(0)-h_1\psi(0)=0$, $\psi'(1)+h_2\psi(1)=0$, $D_+ = D\cap\{t>0\}$, $D_- = D\cap\{t<0\}$.

Обратная задача (2) - (8) нами изучена в работе [1] при $b = 0$. В данной работе, следуя [1, 2], установлен критерий единственности решения задачи при всех $b > 0$. Методом спектральных разложений решения поставленной задачи построено в виде суммы ряда по собственным функциям одномерной задачи Штурма – Лиувилля.

Лемма. *Если* α *— положительное рациональное число,* b *— положительное действительное число, то найдется число* K_0*, зависящее от* h_1, h_2, α, β, b*, такое, что при любом*

$$\beta\in\{\beta\mid\beta>0,\ \beta\neq-(1/\lambda_k^2)\ln\delta_{\alpha b}(k),\ k\in\mathbb{N},\ 1\leqslant k\leqslant K_0\},$$

где

$$\delta_{\alpha b}(k)=\sqrt{1+\lambda_k^2}\sin(\lambda_k\alpha+\gamma_k),\ \gamma_k=\arcsin(1/\sqrt{1+\lambda_k^2}),$$

$\lambda_k=\sqrt{b^2+\mu_k^2}$ $\mu_k>0$ *— решении уравнения*

$$ctg\mu=\mu/(h_1+h_2)-h_1h_2/\mu(h_1+h_2)$$

и любом $k\in\mathbb{N}$ *справедлива оценка*

$$k|\delta_{\alpha\beta b}(k)|\geqslant C_{\alpha\beta b}>0. \tag{9}$$

$C_{\alpha\beta b}>0$ *— постоянная, зависящая от* h_1, h_2, α, β *и* b.

Теорема 1. *Если существует решение* $u(x,t)$ *и* $f(x,t)$ *обратной задачи, то оно единственно только тогда, когда при всех* $k\in\mathbb{N}$ *выполнено условие*

$$\delta_{\alpha\beta b}(k)=\lambda_k+\sin\lambda_k\alpha-\lambda_k\cos\lambda_k\alpha-e^{-\lambda_k^2\beta}\sin\lambda_k\alpha\neq0.$$

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^6[0,1]$, $g(x) \in C^5[0,1]$, $\varphi^{(i)}(0) - h_1\varphi^{(i-1)}(0) = 0$, $\varphi^{(i)} + h_2\varphi^{(i-1)} = 0$, $\psi^{(i)}(0) - h_1\psi^{(i-1)}(0) = 0$, $\psi^{(i)}(1) + h_2\psi^{(i-1)}(1) = 0$, $i = 1,3,5$, $g^{(j)}(0) - h_1 g^{(j-1)}(0) = 0$, $g^{(j)} + h_2 g^{(j-1)} = 0$, $j = 1,3$, *и справедлива лемма. Тогда существует единственное решение задачи* (2) - (8), *и оно представляется формулами*

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{\lambda_k^2}\left(e^{-\lambda_k^2\beta} - e^{-\lambda_k^2 t}\right) X_k(x) + \varphi(x),\ t > 0,$$

$$u(x,t) = \psi(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k \sin\lambda_k t - b_k\cos\lambda_k t + c_k\sin\lambda_k\alpha + b_k\cos\lambda_k\alpha}{\lambda_k} X_k(x),\ t < 0,$$

$$f_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k^2\beta} X_k(x) - \varphi''(x),$$

$$f_2(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k\left(c_k\sin\lambda_k\alpha + b_k\cos\lambda_k\alpha\right) X_k(x) - \psi''(x),$$

где

$$b_k = \frac{1}{\delta_{\alpha\beta b}(k)}[\lambda_k^2(\varphi_k - \psi_k)\cos\lambda_k\alpha - g_k(1 - e^{-\lambda_k^2\beta} + \lambda_k\sin\lambda_k\alpha)],$$

$$c_k = \frac{1}{\delta_{\alpha\beta b}(k)}[\lambda_k^2(\varphi_k - \psi_k)\sin\lambda_k\alpha + g_k(\cos\lambda_k\alpha - 1)\lambda_k],$$

$$\varphi_k = \nu_k\int_0^1 \varphi(x)X_k(x)\,dx,\ \psi_k = \nu_k\int_0^1 \psi(x)X_k(x)\,dx,$$

$$g_k = \nu_k\int_0^1 g(x)X_k(x)\,dx,$$

$$X_k(x) = \cos\mu_k x + (h_1/\mu_k)\sin\mu_k x,$$

$$\nu_k = \frac{2\mu_k^2(\mu_k^2 + h_2^2)}{(\mu_k^2 + h_1^2)(\mu_k^2 + h_2^2) + (h_1 + h_2)(\mu_k^2 + h_1h_2)}.$$

Пусть

$$\|u(x,t)\|_{L_2(0,1)} = \|u\|_{L_2} = \left(\int\limits_0^1 |u(x,t)|^2 dx\right)^{1/2},$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D}_\pm)} = \max_{\overline{D}_\pm} |u(x,t)|,$$

$$\|f(x)\|_{W_2^n} = \left(\int\limits_0^1 \left(\sum_{k=0}^{n} |f^{(k)}(x)|^2\right) dx\right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Тогда справедлива следующая

Теорема 3. *Для решения обратной задачи* (2) – (8) *справедливы оценки:*

$$\|u(x,t)\|_{L_2} \leqslant A_1(\|\varphi\|_{W_2^1} + \|\psi\|_{W_2^1} + \|g\|_{W_2^0}), \ t \geqslant 0,$$

$$\|u(x,t)\|_{L_2} \leqslant A_2(\|\varphi\|_{W_2^2} + \|\psi\|_{W_2^2} + \|g\|_{W_2^1}), \ t \leqslant 0,$$

$$\|f_1(x)\|_{L_2} \leqslant A_3(\|\varphi\|_{W_2^2} + \|\psi\|_{W_2^0} + \|g\|_{W_2^0}),$$

$$\|f_2(x)\|_{L_2} \leqslant A_4(\|\varphi\|_{W_2^3} + \|\psi\|_{W_2^3} + \|g\|_{W_2^2}),$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D}_+)} \leqslant A_5(\|\varphi\|_{W_2^2} + \|\psi\|_{W_2^2} + \|g\|_{W_2^0}),$$

$$\|u(x,t)\|_{C(\overline{D}_-)} \leqslant A_6(\|\varphi\|_{W_2^3} + \|\psi\|_{W_2^3} + \|g\|_{W_2^2}),$$

$$\|f_1(x)\|_{C[0,1]} \leqslant A_7(\|\varphi\|_{W_2^3} + \|\psi\|_{W_2^0} + \|g\|_{W_2^0}),$$

$$\|f_2(x)\|_{C[0,1]} \leqslant A_8(\|\varphi\|_{W_2^4} + \|\psi\|_{W_2^4} + \|g\|_{W_2^3}),$$

где постоянные A_i, $i = \overline{1,8}$, не зависят от функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Сафин Э. М. *Обратная задача для уравнения параболо-гиперболического типа с граничными условиями третьего рода* // Труды Стерлитамакского филиала Академии наук Республики Башкортостан. Серия "Физико-математические и технические наук" – Уфа: Гилем, 2009. – Вып. 6.– С. 118–126.

2. Сабитов К. Б., Сафин Э. М. *Обратная задача для уравнения параболо-гиперболического типа в прямоугольной области* // ДАН. – 2009. – Т. 429. – № 4. – С. 451-454.

В. М. Свиркин

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН, v_svirkin@mail.ru

СПЕКТР ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА СВЯЗНЫХ КОМПАКТНЫХ ПРОСТЫХ ГРУПП ЛИ РАНГА ОДИН И ДВА

В работах [2] и [3] найден алгоритм вычисления спектра лапласиана для вещественных и комплексных функций на связной компактной односвязной простой группе Ли с биинвариантной римановой метрикой. Рассматривается обобщение этого алгоритма на неодносвязный случай, то есть на случай произвольной связной компактной простой группы Ли G с биинвариантной римановой метрикой.

Элементы матриц каждого неприводимого унитарного матричного комплексного представления $c(\Lambda)$ размерности $d(\Lambda)$ группы Ли G со старшим весом Λ являются линейно независимыми комплексными собственными функциями лапласиана, отвечающими одному и тому же собственному значению